Ορισμός: Μια ακολουθία $(\bar{a}_\nu) \in \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ ή έχει όριο το $\bar{a}_0 \in \mathbb{R}^n$, συμβολικά $\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0$ όταν $\nu \to \infty$ ή απλούστερα $\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0$ αν $\|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| \to 0$ στο $\mathbb{R}$ δηλαδή:

$$\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 :\Leftrightarrow \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| \to 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}),\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon.$$

Από τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$ μέσω της σύγκλισης της απόστασης από το όριο της ακολουθίας προκύπτουν οι [illegible] ιδιότητες της σύγκλισης στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση: Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας $(\bar{a}_\nu \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{N})$ ορίζεται μονοσήμαντα και το συμβολίζουμε με $\lim\limits_{\nu \to \infty} \bar{a}_\nu$.

Απόδειξη

Έστω ότι το όριο δεν είναι μοναδικό

άρα $\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0$ και $\bar{a}_\nu \to \bar{\beta}_0$ ώστε $\bar{a}_0 \neq \bar{\beta}_0$.

Ενώ $\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\| > 0$

Δίχως βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το $\varepsilon = \dfrac{\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\|}{2} > 0$:

1ος) $(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) : \nu \geq \nu_1 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon = \dfrac{\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\|}{2}$

2ος) $(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) : \nu \geq \nu_2 : \|\bar{a}_\nu - \bar{\beta}_0\| < \varepsilon = \dfrac{\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\|}{2}$

άρα $(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$:

$$\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\| = \|\bar{a}_0 - \bar{a}_\nu + \bar{a}_\nu - \bar{\beta}_0\| \leq \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| + \|\bar{a}_\nu - \bar{\beta}_0\| <$$
$$< \frac{\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\|}{2} + \frac{\|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\|}{2} = \|\bar{a}_0 - \bar{\beta}_0\| \quad \text{Άτοπο!}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (ως άσκηση για το σπίτι)
Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ($\bar{a}_\nu \subset \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{N}$) είναι και φραγμένη.
(δηλ. $(\exists r>0)$: $\bar{a}_\nu \subset B(\bar{0}, r)$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$
Δίχως βλάβη γενικότητας έστω $\varepsilon = 1$
άρα $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon = 1$ (1)
και λόγω ότι $\|\bar{a}_\nu\| = \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0 + \bar{a}_0\| \leq \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| + \|\bar{a}_0\|$
τότε $\|\bar{a}_\nu\| \leq \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| + \|\bar{a}_0\| < 1 + \|\bar{a}_0\|$
Άρα
$(\forall \nu \in \mathbb{N})$: $\|\bar{a}_\nu\| \leq \max\{\|\bar{a}_1\|, \dots, \|\bar{a}_{\nu_0}\|, 1+\|\bar{a}_0\|\} =: r_0$
και συνεπώς για κάθε $r > r_0$ αποδείχτηκε.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ισχύει για $\bar{a}_\nu \subset \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$ ότι:
$\bar{a}_\nu = (a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, \dots, a_\nu^{(n)}) \to \bar{a}_0 = (a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(n)}) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n : a_\nu^{(i)} \to a_0^{(i)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• $(\Longrightarrow)$ •

$\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon$
$\Longrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, n : \|a_\nu^{(i)} - a_0^{(i)}\| < \varepsilon$
Δηλαδή $a_\nu^{(i)} \to a_0^{(i)}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$

• $(\Longleftarrow)$ •

Έστω $\forall i = 1, 2, \dots n$: $a_\nu^{(i)} \to a_0^{(i)} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) : \nu \geq \nu_0 : \|a_\nu^{(i)} - a_0^{(i)}\| < \varepsilon^*$
δίχως βλάβη της γενικότητας θεωρούμε
$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Longrightarrow (\forall \nu \geq \nu_0)$: το $\nu_0 = \max\{\nu_i, i = 1, 2, \dots, n\}$:
: $\|a_\nu^{(i)} - a_0^{(i)}\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\forall \nu \geq \nu_0) : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|a_\nu^{(i)} - a_0^{(i)}\|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$

δηλαδή $\|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\| < \varepsilon$ άρα ισχύει ο ορισμός της ακολουθίας.

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0 \Rightarrow \|\bar{a}_\nu\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \|\bar{a}_0\|$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(\bar{a}_\nu \to \bar{a}_0) \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0\in\mathbb{N})(\forall \nu\in\mathbb{N})\ \nu\ge\nu_0 : \|\bar{a}_\nu - \bar{a}_0\|<\varepsilon$$

$$\iff \|\bar{a}_\nu-\bar{a}_0\|\to 0$$

άρα αρκεί νδο:

$$\Big|\,\|\bar{a}_\nu\|-\|\bar{a}_0\|\,\Big| \to 0$$

Γενικά, από τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι.

$$0\le \Big|\,\|\bar{a}_\nu\|-\|\bar{a}_0\|\,\Big| \le \|\bar{a}_\nu-\bar{a}_0\| \quad , \forall \nu\in\mathbb{N}$$

Έτσι, από Θ. ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι

αφού από αριστερά έχουμε 0

και από δεξιά $\lim \bar{a}_\nu = 0$ άρα $\|\bar{a}_\nu-\bar{a}_0\|\to 0$

τότε $\lim \|\bar{a}_\nu\| = \|\bar{a}_0\| \iff \Big|\,\|\bar{a}_\nu\|-\|\bar{a}_0\|\,\Big| \to 0$.